**Def. Successioni di funzioni**

Sia un intervallo contenuto in e per ogni una funzione deﬁnita in . Consideriamo la successione di funzioni

. che denoteremo anche con .

Osserviamo che ha una doppia dipendenza: nella variabilee nell’indice ;

ﬁssato si ha la funzione ;

a ﬁssato si ha la successione numerica.

**Def. Convergenza puntuale**

Data una successione di funzioni deﬁnite in e data , si dice che puntualmente in (o che)

Se

Ciò equivale a dire, ricordando la deﬁnizione di limite per una successione, che

**Def. Convergenza uniforme**

Data una successione di funzioni deﬁnite in e data , si dice che uniformemente in

Se

Utilizzando la deﬁnizione di estremo superiore, si ha che per dimostrare che uniformemente in

basta veriﬁcare che

O equivalentemente

**Th. Continuità del limite (teorema convergenza uniforme)**

Sia successione di funzioni *continue* deﬁnite in un intervallo e sia tale che uniformemente in . Allora la funzione è continua

O equivalentemente

1. uniforme è continua
2. continua

**N.B.**

Ma non è detto che se è continua allora uniforme e continua

**Th. Inversione dei limiti (teorema convergenza uniforme)**

Sia successione di funzioni definite in un intervallo e sia tale che uniformemente in . Supponiamo inoltre che per ogni esista il limite

Allora esistono e coincidono i due limiti seguenti

**Th. Passaggio del limite sotto il segno di integrale (teorema convergenza uniforme)**

Sia successione di funzioni *continue* deﬁnite in un intervallo e sia tale che uniformemente in .

Allora vale la seguente formula

Dim.

Essendo limite uniforme di funzioni continue, allora essa è continua in e quindi integrabile. Per avere la tesi, grazie alla deﬁnizione di limite, basta mostrare che per ogni

si abbia

D’altra parte, poichéuniformemente, per ogni si ha

Quindi, ﬁssato , se si sceglie

si ottiene per ogni

**Th. Passaggio del limite sotto il segno di derivata (teorema convergenza uniforme)**

Sia successione di funzioni di classe (cioè *derivabili* e con *derivate continue*) definite in un intervallo

E sia tale che puntualmente in .

Supponiamo inoltre che la successione delle derivate converga uniformemente verso una funzione g.

Allora si ha che uniformemente in .

è derivabile e f’=g

Cioè vale la seguente formula

**Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme:**

**Th. Dini**

Sia successione di funzioni *continue* deﬁnite in un intervallo e sia *funzione* *continua* tale che puntualmente in .

Assumiamo inoltre che tale successione sia monotona crescente rispetto ad

Cioè per ogni si ha che

Allora la successione converge uniformemente in

**Th. 2**

Sia successione di funzioni *non necessariamente* *continue* deﬁnite in un intervallo e sia *funzione* *continua* tale che puntualmente in .

Assumiamo inoltre per ogni la funzione sia monotona crescente rispetto ad x

Cioè si ha che

Allora

Allora la successione uniformemente in

**Def. Convergenza puntuale serie di funzioni**

Supponiamo che per ogni la successione di funzioni ammetta limite ﬁnito

Cioè

In tal caso la serie di funzioni di termine generale converge puntualmente ad in e è la somma della serie e si scrive

L’insieme A è l’insieme di convergenza puntuale

**Def. Convergenza assoluta serie di funzioni**

Si dice che la serie *converge assolutamente* in

se per ogni converge la serie numerica

La convergenza assoluta implica la convergenza puntuale ma non vale il viceversa

**Def. Convergenza uniforme serie di funzioni**

Si dice che la serie *converge uniformemente* ad S(x) in A se la successione di funzioni ( converge uniformemente alla funzione S(x) in A nel senso delle successioni

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale ma non vale il viceversa

**Def. Convergenza totale**

Si dice che la serie *converge totalmente* in se esiste una successione numerica tale che

E se la serie numerica risulta convergente

La convergenza totale implica tutte le altre convergenze

**N.B.**

la convergenza assoluta e la convergenza uniforme implicano quella puntuale, la convergenza totale implica l’assoluta e l’uniforme.

Ma la convergenza uniforme NON implica quella assoluta e neanche il viceversa vale

**Th. Continuità della somma di una serie**

Sia una successione di *funzioni continue* deﬁnite in un intervallo la somma della serie avente come termine generale

Cioè

Supponiamo inoltre che tale serie converga uniformemente ad

Allora la funzioneè continua

**Th. Integrazione per serie (o integrazione termine a termine)**

Sia una successione di *funzioni continue* deﬁnite in un intervallo la somma della serie avente come termine generale

Cioè

Supponiamo inoltre che tale serie converga uniformemente ad

Allora vale la seguente formula

Dim.

Essendo S(x) il limite uniforme della successione delle somme parziali (che sono funzioni continue)

Allora essa è continua in e quindi integrabile.

Quindi si ha

dove si è usato il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per la successione di funzioni che converge uniformemente ad

**Th. Derivazione per serie ( o derivazione termine a termine)**

Sia successione di funzioni di classe (cioè *derivabili* e con *derivate continue*) definite in un intervallo la somma della serie avente come termine generale

Cioè

Consideriamo la serie derivata

E supponiamo che quest’ultima converga uniformemente

Allora la funzione S è anch’essa di classe e vale la seguente formula

**Def. Serie di potenze centrate nell’origine**

Sia una successione di numeri reali e sia

La serie di funzioni

Prende il nome di serie di potenze di coefficienti

**Def. Serie di potenze centrate in un punto**

Una serie di potenze centrata in un punto

**N.B**

Notiamo che k ≥ 1 si ha (0) = 0 e quindi

Quindi in x = 0 (o in generale in x = ) la serie converge

Ne segue che l’insieme di convergenza puntuale (ICP) non può essere vuoto!

Per una serie di potenze si dimostra che **ICP** è un intorno di 0 avente raggio generalizzato nullo, oppure inﬁnito, oppure ﬁnito.

Quindi si veriﬁca una delle seguenti circostanze:

1. la serie converge per x = 0 ;
2. la serie converge per ogni x ∈R;
3. esiste un numero ρ > 0 tale che la serie converge se |x| < ρ e non converge se |x| > ρ.

**Def. Raggio di convergenza**

Si deﬁnisce il raggio di convergenza della serie di potenze

come l’estremo superiore dell’insieme X dei numeri reali x nei quali essa converge

cioè

dove

Questo estremo superiore esiste sempre e, siccome 0 ∈ X, si ha che . Si veriﬁca facilmente che il raggio di convergenza

ρ = 0 se e solo se x = 0, i.e. X = {0}

se e solo se X = R.

**Th.**

Sia

Allora la serie di potenze

ha raggio di convergenza se e solo se essa converge per e non converge per

Inoltre, se , essa converge assolutamente per . Inﬁne converge totalmente (e quindi uniformemente) in ogni intervallo chiuso e limitato . Nulla si può dire, in generale, sulla convergenza della serie di potenze nei punti

**Criterio di Cauchy-Hadamard (ricerca raggio di convergenza)**

Data la serie di potenze

Se esiste il limite

Allora il raggio di convergenza della serie è

**Criterio di D’Alembert**

Data la serie di potenze

Con definitivamente, se esiste il limite

Allora il raggio di convergenza della serie

**Def. Serie derivata**

Data la serie di potenze

La serie ottenuta derivando questa termine a termine, cioè la serie

Viene detta serie derivata della serie di potenze

**Def. Serie integrata**

Data la serie di potenze

La serie ottenuta integrando questa serie termine a termine, cioè la serie

Viene detta serie integrata della serie di potenze

**Th.**

Una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della sua serie derivata e della sua serie integrata.

**Th. Di derivazione e di integrazione delle serie di potenze**

Se la serie di potenze

ha raggio di convergenza non nullo e se f (x) è la sua somma

cioè

Allora risulta anche

e

**N.B**

Più in generale si possono considerare serie di potenze di punto iniziale , anche diverso da zero

Lo studio di tali serie di potenze viene ricondotto a quelle di punto iniziale = 0 con il semplice cambio di variabile ;

se è il suo raggio di convergenza e

allora essa *converge assolutamente* per e non converge per

Inoltre *converge totalmente* negli intervalli del tipo , con a arbitrario.

Se

allora essa *converge assolutamente* per ogni

*converge totalmente* negli intervalli del tipo, con arbitrario.

Gli stessi criteri precedenti forniscono metodi per calcolare il raggio di convergenza anche in questo caso.

**Criterio di Abel**

Sia data la serie di potenze

Avente raggio di convergenza

Se tale serie converge nel punto , i.e. se converge la serie numerica

Allora la serie di potenze converge uniformemente in intervalli del tipo con Lo stesso criterio vale nel punto

Si osservi che tale convergenza è SOLO uniforme, mentre la convergenza totale, come già visto, è garantita solo negli intervalli del tipo

**Def. Sviluppabile serie di potenze**

Data una funzione ed ci chiediamo se esiste una serie di potenze di punto iniziale ed convergente in verso

Con un errore

Che si riduce mano a mano che k aumenta

In tal caso si dice che f è sviluppabile in serie di potenze di punto iniziale in

**N.B.**

Se la funzione è un polinomio, lo sviluppo di Taylor di essa è essa stessa

**Th. Unicità dello sviluppo in serie di potenze(teorema condizione necessaria ma non sufficiente per avere serie di Taylor)**

Data la serie di potenze

Avente raggio di convergenza , sia la sua somma

Cioè

Allora è una funzione indeﬁnitivamente derivabile (o per e per ogni la derivata di ordine vale

Inoltre Per ogni e dunque f è sviluppabile in serie nella forma

**Dim.**

Si applica m volte il teorema di derivazione termine a termine per le serie di potenze e si ottiene

cioè

m=1(serie derivata)

m=2

Per dimostrare la seconda parte

Ponendo adesso si annullano tutti gli addendi di tale serie tranne il primo

Cioèinfatti

Da cui si ha

Ne segue che

E dunque f è sviluppabile in serie nella forma

È importante notare che dal teorema precedente segue l’unicità dello sviluppo in serie di potenze.

**Def. Serie di Taylor**

Data una funzione si può considerare la serie

Che prende il nome di serie di Taylor di f ed i coefficienti

Sono detti coefficienti di Taylor di f

Nel caso in cui , la serie di Taylor prende il nome di serie di Mac Laurin

**N.B.**

Data una funzione ci chiediamo se f coincide sempre in con la sua serie di Taylor

Cioè se f è sviluppabile in serie di Taylor in

**Th. (Condizione sufficiente per sviluppabilità in serie di Taylor)**

Data una funzione supponiamo che esistano delle costanti positive M,L ≥ 0 tali che

Allora, per ogni la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale nell’intervallo

In particolare, basta che le derivate di f siano equilimitate in (è il caso L = 1).

**Sviluppi Mac Laurin**

**Def. Funzione generalmente continua**

Diciamo che una funzione f *è generalmente continua* in un intervallo se ha al più un numero ﬁnito di discontinuità in

**N.B.**

Notiamo che esistono funzioni che non sono generalmente continue

**Def. Funzione sommabile**

Diciamo che una funzione f generalmente continua è *sommabile* in un intervallo se

**N.B.**

Osserviamo che una funzione generalmente continua potrebbe non essere sommabile.

per

**Def. Funzioni periodiche**

Una funzione si dice periodica di periodo T (o T-periodica) se per ogni si ha

Ovviamente se una funzione è periodica con periodo , allora è anche periodica con periodo

**Def. Polinomi trigonometrici**

Le somme ﬁnite

di funzioni del tipo precedente si dicono polinomi trigonometrici di ordine n e sono funzioni

**Def. Serie trigonometriche**

Supponiamo che la successione di funzioni

converga per ogni ad una funzione

Ciò equivale a dire che la seguente serie

Converge puntualmente e ha somma la funzione

Tale somma è necessariamente una funzione 2π-periodica. Tale serie è detta *serie trigonometrica* di coeﬃcienti

**Prop. (condizioni necessarie affinché possa sviluppare in serie trigonometrica una funzione)**

Supponiamo sia f *sviluppabile in serie trigonometrica*

Cioè

Supponiamo inoltre che *la serie converga uniformemente* in

Allora necessariamente i coeﬃcienti hanno la seguente forma:

I coeﬃcienti e della precedente proposizione prendono il nome di coeﬃcienti di Fourier e la serie con essi costruita è detta serie di Fourier di f .

Perché tali coeﬃcienti siano ben deﬁniti basta che f sia 2π-periodica e sommabile in [−π,π].

**N.B.**

Il coefficiente

È il valor medio di f sull’intervallo di periodicità

**Def. Funzione continua a tratti**

Diciamo che una funzione f deﬁnita su un intervallo è *continua a tratti* in

se esiste una suddivisione dell’intervallo del tipo

tale che

• per ogni la funzione è continua negli intervalli aperti

• nei punti ha al più discontinuità eliminabili o di tipo salto.

**Def. Funzione regolare a tratti**

Diciamo che una funzione f deﬁnita su un intervallo è  *a tratti* in (o *regolare a tratti* in

se esiste una suddivisione dell’intervallo del tipo

tale che

• per ogni la funzione è (i.e. derivabile e con derivata continua) negli intervalli aperti

• nei punti ha al più discontinuità eliminabili o di tipo salto

• in tali punti ha derivata destra e sinistra ﬁnita.

**N.B.**

• Le funzioni continue sono anche continue a tratti.

• Le funzioni sono anche a tratti.

• Le funzioni continue a tratti in (e quindi in particolare le continue e anche le a tratti) sono sommabili.

• Ma non vale il viceversa

**Condizione necessaria affinché posso scrivere la serie di Fourier**

Poter scrivere la serie di Fourier di f , basta che f sia sommabile e periodica.

**Th. Convergenza puntuale della serie di Fourier**

Sia f una *funzione 2π-periodica e regolare a tratti in R.*

Allora per ogni la serie di Fourier di f *converge* a

Cioè alla media tra limite destro e sinistro in x

In particolare converge a nei punti di continuità

Cioè dove

**Prop. (Convergenza uniforme della serie di Fourier)**

Sotto le stesse ipotesi del teorema precedente, la serie di Fourier di f *converge uniformemente in ogni sotto intervallo*  in cui è continua.

**Th. Convergenza totale della serie di Fourier**

Sia f una funzione *2π-periodica, continua e regolare a tratti in R*.

Allora la serie di Fourier di f *converge totalmente in R* (e quindi uniformemente) alla funzione f .

**Th. Integrazione termine a termine per una serie di Fourier**

Sia f una funzione 2π-periodica e regolare a tratti in R.

Allora ﬁssati ,si ha

**N.B.**

Questo teorema aﬀerma che una serie di Fourier di una funzione regolare a tratti in R si può integrare termine a termine anche senza la convergenza uniforme della serie stessa

**Def. Prodotto scalare**

Nello spazio delle funzioni continue a tratti su un intervallo si può introdurre quello che viene detto un prodotto scalare ed è cosi deﬁnito:

Questo prodotto tra funzioni gode delle stesse proprietà del prodotto scalare in:

**N.B.**

Si dice che due funzioni continue a tratti f e g sono ortogonali se . Inoltre nello spazio delle funzioni continue a tratti si può introdurre una distanza nel modo seguente

**Def. Quadrato sommabile**

Si dice che una funzione 2π-periodica `e di quadrato sommabile se

**N.B.**

Se f è quadrato sommabile, allora è sommabile

Dim (che quadrato sommabile è sommabile)

**Th.**

Sia f una funzione 2π-periodica, *generalmente continua e di quadrato sommabile*. Siano ,, i coeﬃcienti di Fourier di f e sia la somma parziale n-esima della serie di Fourier di f ,

cioè

Allora si ha

cioè

realizza la minima distanza di f(x) da

La disuguaglianza

Che è parte dell’eguaglianza di Parseval, prende il nome di diseguaglianza di Bessel

**Def. Convergenza media quadratica**

Si dice che la serie di Fourier converge in media quadratica se

Dalla 1) e dalla 2) del teorema precedente

**Dim.**

Dalla 1)

Che a sua volta sostituendo nella 2)

Segue

**Corollario 1**

Sia f una funzione *2π-periodica, generalmente continua e di quadrato sommabile,* la serie di Fourier *converge in media quadratica.*

**Corollario 2**

Sia f una funzione *2π-periodica, generalmente continua e di quadrato sommabile*, si ha

**N.B**

Data una *funzione 2π-periodica*:

* Se è *continua e a tratti*

Allora la *convergenza è totale* (e quindi uniforme)

La serie converge ad e dunque *f è sviluppabile in serie di Fourier*

* Se f è  *a tratti*, allora la *convergenza è puntuale*

la somma della serie è

e la *convergenza è uniforme* in ogni intervallo in cui f (x) è continua

* Se f è *generalmente continua e di quadrato sommabile*

Allora la *convergenza è in media quadratica*

* Inﬁne poiché una *funzione continua a tratti è generalmente continua e di quadrato sommabile*

Allora si ha che se

*f è continua a tratti*, la *convergenza è in media quadratica e vale l’eguaglianza di Parseval*.

**Def. Complessi**

Dato , e

Pertanto oltre alla notazione come coppia si usa spesso anche la notazione Le coordinate x e y di z sono dette anche *coordinate cartesiane.*

Avendo identiﬁcato i numeri complessi con le coppie di si parla spesso di C come del *piano complesso*, dove i numeri reali sono i punti dell’asse delle x, mentre i numeri immaginari sono i punti dell’asse delle y.

A diﬀerenza di R, il campo C dei numeri complessi *non è ordinato*, cioè non esiste una relazione d’ordine totale in C che sia compatibile con le operazioni algebriche.

*Le coordinate polari o trigonometriche* nel piano complesso. Dato deﬁniamo il modulo come

**Def. Argomento**

Deﬁniamo ora l’argomento di z. Dato , consideriamo il numero

Si ha che

Quindi esiste un angolo tale che

Tale è detto argomento di z

Si indica con l’insieme degli argomenti di z

Un elemento di questo insieme è detto anche determinazione dell’argomento di z. Si deﬁnisce inﬁne l’argomento principale come l’unico elemento di che appartiene all’intervallo

**Formula di De Moivre**

Formula radici

**Def. Intorno circolare**

Si deﬁnisce inoltre *intorno circolare* (o palla) di centro e raggio l’insieme

**Def. Punto interno**

z si dice *interno* ad A se

**Def. Punto esterno**

z si dice *esterno* ad A se ( complementare di A),

**Def. Punto di frontiera**

z si dice *punto di frontiera* di A se e

**Def. Punto di accumulazione**

z si dice *punto di accumulazione* di A se l’intersezione contiene inﬁniti punti.

**Def. Insieme aperto e chiuso**

Inoltre un insieme si dice *aperto* se ogni suo punto è interno ad A stesso e si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto.

**Def. Limite successione di numeri complessi**

Data una successione di numeri complessi diciamo che essa converge a,

Se

**Def. Insieme connesso**

Un aperto si dice *connesso* se comunque si ﬁssino due punti in A esiste una poligonale che li congiunge, tutta contenuta in A.

**Def. Limite**

Si dice che è il limite di f per z che tende a (punto di accumulazione di A, non necessariamente appartenente ad A), e si scrive

Se

Si dice che è il limite di f per che tende a e si scrive

Se

**Def. Funzione continua variabile complessa**

La funzione f si dice continua in se

Cioè se

Inﬁne la funzione f si dice continua in A se lo è in ogni punto .

**N.B.**

e dove sono dette *funzioni parte reale* e *parte immaginaria* di f

Le funzioni costanti, la funzione identità, la funzione modulo, coniugato e le funzioni ( sono tutte continue in C

Le funzioni razionali fratte sono tutte continue in C privato degli zeri del polinomio al denominatore

**Es.**

è continua in C con

è continua in

**Def. Funzione**

La funzione deﬁnita dà è continua in

Infatti, per tale funzione si ha e

per

Che è discontinua su

Quindi è continua tranne sul semiasse negativo

**Def. Funzione derivabile variabile complessa**

Sia un aperto connesso e sia. Per ogni si deﬁnisce *rapporto incrementale* di f in z la funzione

Dove ed è tale che

La funzione f si dice *derivabile in un punto* se esiste in C il limite del rapporto incrementale per

**Def. Derivata variabile complessa**

Il numero complesso λ (se esiste) si chiama la derivata di f in z e si denota con oppure

Come in campo reale, la derivabilità implica la continuità

**Def. Differenziabile variabile complessa**

Sia dove

La funzione f si dice *diﬀerenziabile* rispetto a nel punto se, per ogni coppia di incrementi , si ha che

Dove è un infinitesimo di ordine superiore alla distanza euclidea dei punti e

**N.B**

Condizione sufficiente perché f differenziabile rispetto è che esistano le derivate parziali prime di f e siano continue in

**Def. Differenziale**

L’applicazione

Si dice *differenziale* di

**Condizioni di Cauchy-Riemann**

La diﬀerenziabilità dirispetto a NON equivale alla diﬀerenziabilità di rispetto a z.

**Prop.**

Sia *diﬀerenziabile rispetto a*

Allora è diﬀerenziabile (come funzione di variabile complessa) se e solo se si ha

**(CR1)**

Se vale l’ultima uguaglianza, allora

Scrivendo si ha

Ricordando che

**(CR2)**

Le uguaglianze **(CR2)** (o equivalentemente **(CR1)**) sono dette condizioni di Cauchy-Riemann.

**N.B.**

e

Prodotto scalare è nullo

**Def. Funzione olomorfa**

Si dice che è *olomorfa* in un aperto connesso A se per ogni la funzione f è derivabile in

**Def. Funzione intera**

Una funzione olomorfa in tutto C si dice *intera*.

**N.B.**

Le funzioni (non costanti) che hanno valori solo puramente reali o solo puramente immaginari non sono olomorfe in alcun aperto del piano complesso, poiché non soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Es.

**Def. Funzione esponenziale in campo complesso**

Funzione olomorfa in tutto C tale che la sua restrizione all’asse reale coincida con la funzione

Sia che

Si ha che

che implica che

**N.B**

Non si può parlare di positività di poiché in C non c’è relazione d’ordine

**Def. Forma esponenziale numeri complessi**

Inoltre per ogni si ha che e vale la cosiddetta formula di Eulero

Quindi ogni numero complesso si può scrivere nella forma esponenziale

**N.B**

Dunque i punti del tipo θ sono tutti e soli i punti della circonferenza di centro 0 e raggio ρ.

**Proprietà esponenziale campo complesso**

1. Per ogni con

si ha che , ossia è un’estensione della funzione esponenziale in campo reale.

1. La funzione , è continua in tutto C poiché

la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono continue in .

1. La funzione è olomorfa in tutto C poiché ammette le derivate parziali continue e vale **(CR1)**.

Inoltre ammette come derivata se stessa, poiché dalla **(CR1)** si ha

1. La funzione è periodica di periodo , poiché per ogni si ha

**N.B.**

Essendo periodica NON si può invertire in tutto C

1. Per la funzione vale la formula usuale

**Condizioni di Cauchy-Riemann**

Usando la forma esponenziale dei numeri complessi, le condizioni di Cauchy-Riemann in un aperto A non contenente l’origine si possono scrivere in modo equivalente in coordinate polari come segue:­­

**(CR3)**

Infatti se f è derivabile

Allora

Inoltre di si ha

Da

**Def. Logaritmo in campo complesso**

Dato si definisce nel seguente modo

Da

se e solo se

A causa della periodicità dell’esponenziale ci sono infiniti valori per cui e dunque inifite determinazioni del logaritmo, si dice quindi che

è una funzione *polidroma*

Cerchiamo quindi e di

E si ha che

Da cui segue che

**N.B**

Questo logaritmo è quello dei numeri reali poiché

Quindi

Questa non è una funzione ma un insieme

Si vede ora chiaramente che è una funzione a più valori i quali diﬀeriscono per multipli interi relativi di (poiché è deﬁnita a meno di multipli di ).

**Def. Determinazione principale Log z**

Si pone

Quindi

**Proprietà logaritmo in campo complesso**

1. La funzione è deﬁnita in

Cioè per .

1. Per ogni , con

si ha che , ossia è un’estensione della funzione logaritmo in campo reale.

1. La funzione Log z è continua in poiché la sua parte immaginaria è continua solo in , cioè è discontinua sul semiasse reale negativo.
2. La funzione è olomorfa in infatti non può essere derivabile nei suoi punti di discontinuità

Cioè sul semiasse reale negativo

Altrove è olomorfa poiché ammette le derivate parziali continue e vale la condizione di Cauchy-Riemann in coordinate polari

**(CR3)**

Infatti se

Essendo

Si ha che

**Dim** che

Scrivo come

e si ha

Segue

**N.B**

Inﬁne si osservi che per la funzione Log z non valgono le usuali formule del prodotto e della potenza del logaritmo reale.

Es.

**Def. Funzione potenza in campo complesso**

Si tratta di deﬁnire una funzione olomorfa su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con la funzione potenza in campo reale.

Per ogni coppia

In generale ci sono infinite determinazione (come per il logaritmo)

La determinazione principale è

E si chiama *potenza principale*

Tale funzione è definita in ed è continua ed olomorfa in

**Casi particolari funzione potenza campo complesso**

1. *Sia*

In tal caso, la potenza (sia la sua determinazione principale, che tutte le altre) è deﬁnita anche in e si ha

Infatti

Poiché

Quindi in questo caso

**è definita in tutto C e continua in**

1. Sia

In tal caso, c’`e una sola determinazione: infatti a causa della periodicità dell’esponenziale (complesso) di periodo si ha

Inoltre coincide con l’usuale potenza

poiché

Si noti che in tal **caso è deﬁnita, continua ed olomorfa in tutto C**. Analogamente, nel caso **, , è deﬁnita, continua ed olomorfa in tutto**

1. Sia

In questo caso ci sono n determinazioni, quelle della radice n-esima di z

Infatti per ogni si ha

ma solo danno luogo a valori distinti (infatti a causa della periodicità del seno e del coseno di periodo per si ottiene lo stesso valore che si ottiene per e così via).

Quindi per la formula precedente ridà gli n valori della radice n-esima di z.

In questo caso () la potenza **(con tutte le sue determinazioni) è deﬁnita e continua in C ed è olomorfa in**

**N.B.**

Per ogni

**Def. Funzioni circolari ed iperboliche nel campo complesso**

Come prima, si tratta di deﬁnire delle funzioni olomorfe su un aperto contenente la semiretta reale positiva, la cui restrizione a tale semiretta coincida con le analoghe funzioni in R

Sia con

Allora

Si ha che per

Quindi nel campo complesso

Dalla della funzione esponenziale si deduce la delle funzioni seno e coseno.

Si può dimostrare che le funzioni circolari non hanno altri zeri che quelli della loro restrizione all’asse dei numeri reali.

**Dim.**

Supponiamo che

Non mi occupo del denominatore perché tanto l’esponenziale non si annulla mai

È un’identità tra due numeri complessi e due numeri complessi sono uguali se la parte reale è uguale alla parte reale corrispondente

E la parte complessa è uguale alla parte complessa corrispondente

Quindi ho verificato la condizione

Tutte queste funzioni sono intere(poiché l’esponenziale lo è)

Cioè definite ed olomorfe in tutto C

**N.B**

In campo complesso non è vero che seno e coseno sono funzioni limitate.

Infatti si noti che, considerata la restrizione della funzione all’asse immaginario (cioè ), si ha

**Def. Serie di potenze in campo complesso di punto iniziale**

Data una successione di numeri complessi e ﬁssato si deﬁnisce serie di potenze in campo complesso di punto iniziale una serie del tipo

I numeri complessi sono detti coefficienti della serie

Se i coeﬃcienti sono deﬁnitivamente nulli (cioè esiste tale che per ogni ) la serie si riduce al polinomio

**N.B.**

Si osservi che in la serie converge e la sua somma è .

Ricordiamo che per *le serie di potenze in campo reale***, l’insieme di convergenza è un intervallo di centro il punto iniziale e raggio R.**

Nel caso di *serie di potenze in campo complesso*, **l’insieme di convergenza è una palla di centro e raggio R.**

**Def. Raggio di convergenza serie complessa**

Tale R si dice raggio di convergenza della serie e si calcola in maniera analoga al caso reale. Inoltre

1. Se

La serie *converge* solo per

1. Se

La serie *converge(assolutamente*) per

*Converge totalmente* per , per ogni r tale che

Non converge per

1. Se

la serie *converge(assolutamente)* in tutto C

e *totalmente* per , per ogni

**Th. Olomorfia somma serie di potenze in campo complesso**

La somma

Di una serie di potenze è una funzione olomorfa dove è definita

(cioè nel suo cerchio di convergenza

E per ogni si ha

E per ogni

Ponendo si ha

**Th. Unicità sviluppo in serie di potenze in campo complesso**

Se

È la somma di una serie convergente definita in

Allora necessariamente si ha che

Cioè la serie di potenze coincide con la serie di Taylor associata alla sua funzione somma

**Sviluppi Mc Laurin campo complesso**

**Def. Serie bilatera**

Sapendo che

Scrivo una serie trigonometrica

Nella forma

Che chiamiamo serie bilatera

**N.B.**

da cui si ha

Dove

**Def. Serie di Fourier in forma esponenziale in campo complesso**

Supponiamo che la serie bilatera converga assolutamente (basta supporre che le due serie numeriche siano convergenti)

Sia la sua somma (che è )

Allora necessariamente, dalla formula nota per i coefficienti di Fourier e dalla forma

Si ha per ogni

I coefficienti cosi ottenuti si dicono coefficienti di Fourier di f e la serie

Si dice serie di Fourier in forma esponenziale

**N.B.**

è un sistema ortogonale

Infatti

È nullo se ed è uguale a se

**Def. Curve regolari**

Diremo che è una *curva regolare* in C

1. Se è una funzione di Classe (derivabile con derivata continua)

*L’immagine di di*  in C

Si dice sostegno (o *traccia*) di

**N.B.**

si dice punto iniziale di

si dice punto finale di

La funzione è detta anche *legge oraria* con cui viene percorso il sostegno/traccia

* Se la curva si dice ***chiusa***
* Se , ristretta ad , è *iniettiva*

Cioè

Allora si dice ***semplice***

* Se è *semplice e chiusa*, viene detta ***circuito***
* Si definisce lunghezza di nel seguente modo:

**Def. Cambiamento di parametro**

Data una *curva regolare*

E data di classe

Tale che

E (tale viene detta *cambiamento di parametro che conserva l’orientamento*)

La nuova curva definita da

È una *curva regolare* che ha lo *stesso sostegno di e lo stesso orientamento*

**N.B.**

Tutte le curve così ottenute formano una classe di equivalenza: esse hanno in comune lo **stesso sostegno**, ma è **diversa** la **legge oraria** con cui questo viene percorso.

Inoltre si possono considerare dei cambiamenti di parametro che cambiano l’orientamento:

**Es.**

Data una curva regolare, la curva deﬁnita da è ancora una curva regolare, ha la **stessa** **traccia** di ,ma è percorsa in senso opposto e dunque scambia i punti estremi, quindi **diverso orientamento**

**Def. Concatenamento di curve**

Date due curve regolari tale che

Si possono concatenare le due curve

Definendo

Si ha

è continua ma in generale non è

La concatenazione analoga di più segmenti dà una poligonale(concatenazione di più segmenti)

**N.B.**

Posso avere più possibilità di concatenare due curve , cioè ho la libertà sulla frazione di tempo ma devo sempre ***garantire*** che il *punto finale di*  ***coincida*** con il *punto iniziale* di

La concatenazione non è ottimale perché la curva non è regolare

**Def. Curva regolare a tratti**

Una curva si dice regolare a tratti se è ottenuta concatenando due o più curve regolari

**Def. Integrale curvilineo**

Dati un aperto connesso una funzione continua e una curva regolare (o regolare a tratti)

la cui traccia , si deﬁnisce l’ integrale di f lungo nel seguente modo:

**N.B.**

La funzione è una funzione di variabile reale a valori complessi

Cioè il parametro è reale ma il risultato è un numero complesso poiché

**Proprietà integrale curvilineo**

1. Linearità:
2. Indipendenza dal cambiamento di parametro (che conserva l’orientamento)
3. Cambio di seno nel passaggio a
4. Additività rispetto alla curva

Dove denota la concatenazione di e di

1. Se

Allora |

**Th. Passaggio al limite**

Sia una successione di funzioni continue definite in A.

Supponiamo che uniformemente in A

Allora

**Def. Primitiva in campo complesso**

un aperto connesso ed una *funzione continua*.

Si dice che è una primitiva di *se è derivabile in A* e

se per ogni .

Come in campo reale, se F è una primitiva di

Allora per ogni la funzione è una primitiva di .

La conoscenza di una primitiva permette di calcolare immediatamente gli integrali curvilinei; infatti vale un analogo del teorema di Torricelli-Barrow.

**Th. Torricelli-Barrow**

Sia A ⊆C un aperto connesso,

sia *curva regolare (o regolare a tratti)* la cui traccia

Sia una *funzione continua* e la sua primitiva

Allora

**Dim.**

**N.B.**

Dal teorema segue che se f ammette una primitiva

allora l’integrale *dipende* **solo** *dagli estremi* e e **non** dalla *curva che li connette*.

* Se è chiusa

Allora

**Th. Esistenza di una primitiva**

Sia un aperto connesso e sia una *funzione continua.*

Allora sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. f ammette una primitiva in A;
2. per *ogni curva regolare a tratti* la cui traccia , l’integrale di f su dipende solo dagli estremi di;
3. per *ogni curva chiusa e regolare a tratti* la cui traccia , l’integrale di f su è nullo.

a ) implica b ) visto nel teorema di Torricelli-Barrow

e che b ) implica c ) segue dal teorema di Torricelli-Barrow se è *chiusa*

**Dim c) implica b)**

Siano e due *curve regolari a tratti* tali che e .

Sia la *concatenazione* di con che risulta essere una *curva chiusa*.

Allora dalla c) di ha

Da cui segue la b)

**Dim. b) implica a)**

Sia un punto ﬁssato, sia e sia una poligonale congiungente con .

L’integrale di f su tale poligonale ***non*** dipende dal cammino, ma solo da e da ; essendo ﬁssato, tale integrale dipende solo da .

Sia

Dove l’ultimo integrale denota l’integrale di f lungo la poligonale.

**N.B.**

La buona definizione di è data da b) perché dice che l’integrale non dipende dalla poligonale scelto ma solo dal mio punto finale

Dobbiamo dimostrare che per ogni .

Fissato , sia tale che

Allora

Dove l’ultimo integrale si intende esteso al segmento

D’altra parte, poiché la funzione ammette la primitiva si ha che

Inoltre, dalla continuità di in , per ogni esiste tale che

per ogni

**Def. Aperto semplicemente connesso**

Un aperto connesso si dice *semplicemente connesso*

se per ogni curva *semplice, chiusa e regolare a tratti contenuta in A*

(signiﬁca che la traccia )

l’aperto limitato che ha come frontiera è interamente contenuto in A.

**Es.**

Intorni circolari e semipiani

**Def. Insieme convesso**

Un insieme A si dice convesso

Se comunque ﬁsso due punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in A.

Se A è convesso, allora A è semplicemente connesso

Il viceversa non vale

**Es.**

è semplicemente connesso, ma non è convesso.

è un aperto connesso, ma non semplicemente connesso e lo stesso vale per ogni corona circolare.

**Def. Forma differenziale lineare**

Se e sono *funzioni a valori reali deﬁnite e continue* in

si chiama *forma diﬀerenziale lineare* in A l’espressione

prodotto scalare tra il campo vettoriale e il vettore spostamento

(le due funzioni X e Y sono detti coeﬃcienti della forma).

La forma diﬀerenziale si dice *regolare* se i coeﬃcienti X e Y sono di *classe* .

**N.B.**

Se è una curva regolare di , contenuta in A, di equazioni ,

si deﬁnisce l’integrale della forma diﬀerenziale nel seguente modo

**Th. Teorema della divergenza (o formula di Gauss-Green in**

Sia un *aperto connesso*.

Sia un *circuito regolare a tratti*, contenuto in A e tale che

1. è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A

Allora , date due funzioni di classe su A (cioè aventi le derivate parziali prime continue) vale la seguente formula

1) L’ipotesi (I) è veriﬁcata subito per ogni curva , se A è semplicemente connesso.

2) Si assume che l’orientamento della curva (da cui dipende il primo membro) sia quello antiorario, cioè in modo tale che un osservatore che la percorri lasci i punti interni alla sua sinistra.

3) La formula vale anche se è l’unione di due curve, come nel caso della frontiera di una corona circolare.

**Th. Integrale di Cauchy**

Sia un *aperto connesso* e sia una *funzione olomorfa*.

Allora per ogni *circuito regolare a tratti*, contenuto in A e tale che:

1. è la frontiera di un aperto D interamente contenuto in A

Si ha che

**Dim.**

Se scriviamo la curva e la funzione f come

Allora

Dove sono delle forme differenziali a coefficienti reali in

**Dal Th. Della divergenza**

Poiché dall’**olomorfia** di f e dalle **condizioni di Cauchy-Riemann** si ha

**Corollario (dato dal teorema integrale di Cauchy e dall’implicazione c) -> a)**

Ogni funzione *olomorfa* in A ammette una primitiva in ogni aperto *semplicemente connesso.*

In particolare, se A stesso è semplicemente connesso, allora f ammette primitiva in A.

**N.B.**

Notiamo che quindi sotto le ipotesi del corollario, “f ammette localmente una primitiva”, cioè per ogni punto esiste un intorno in cui f ammette una primitiva.

Es.

è olomorfa in ma non ammette primitiva in , va d’accordo con il corollario poiché non è semplicemente connesse

Al contrario in è dotata di primitiva, poiché è semplicemente connesso

**Osservazione 1**

Il fatto che non dipenda da r, non è un caso, ma è un fatto generale:

l’integrale di una funzione olomorfa su un circuito non varia se tale circuito viene deformato senza uscire dall’aperto di olomorﬁa.

**Prop.**

Se sono due *circuiti regolari a tratti* con

Se f è *olomorfa* nel dominio D compreso tra

Allora

Tale proposizione è una immediata conseguenza del teorema integrale di Cauchy applicato alla curva

Nel caso particolare in cui f sia olomorfa in tutto il dominio interno a , si ha che i due integrali sono uguali banalmente, essendo entrambi uguali a 0.

**Formula integrale di Cauchy**

Sia un *aperto connesso* e sia una *funzione olomorfa*.

Sia un *circuito regolare a tratti*, contenuto in A e tale che:

1. è *la frontiera* di un aperto D interamente contenuto in A.

Allora per ogni vale la seguente formula:

Si ha

**Osservazione 2**

Il risultato aﬀerma che, una volta che si conosce in valore di f su ,

allora si conosce il valore di f in tutti i punti del suo interno D.

Questo valore è *indipendente dalla curva*  (grazie all’osservazione 1).

Si osservi inoltre che può non essere olomorfa in A.

**Def. Funzioni analitiche**

Sia un *aperto connesso* e la sua frontiera

Una funzione si dice *analitica*

se per ogni essa è *sviluppabile in serie di Taylor* nell’intorno di

con , cioè

**N.B**

Se f è analitica, allora f è olomorfa nel cerchio di convergenza della serie. Vale anche il viceversa

**Th.**

Sia un *aperto connesso* e sia una *funzione olomorfa*.

Allora per ogni , posto

Per ogni ed inoltre

Dove è una circonferenza di centro e raggio minore di r

**Formula integrale Cauchy per le derivate**

N.B.

* n = 0 è esattamente la formula integrale di Cauchy.
* n > 0 si ottiene dalla formula di Cauchy derivando n volte rispetto ad sotto il segno di integrale.
* Se si prende Il risultato aﬀerma che basta che esista una derivata perché esistano tutte le successive. In tal caso si dice che f è , cioè inﬁnitamente derivabile.

Inoltre f derivabile implica che f è localmente sviluppabile in serie di Taylor.

Tutto ciò non accade in campo reale.

**Importante:**

*In campo reale*

f analitica derivabile

ma **NON** vale il viceversa

**Es.**

Questa funzione è ma non

*In campo complesso*

f olomorfa f analitica

In C avere una derivata è molto più forte di avere una derivata nei reali

**Th.**

Sia una *funzione analitica*

Allora e (viste come funzioni delle due variabili reali x e y) sono *funzioni armoniche*

Cioè valgono le seguenti equazioni di Laplace

Operatore è detto Laplaciano

**Dim.**

Essendo f analitica (e quindi olomorfa), dalle condizioni di Cauchy-Riemann si ha

Derivando e usando il teorema di inversione dell’ordine di derivazione (Teorema di Schwartz) si ha

**Th. Morera**

Sia una *funzione continua* nell’aperto connesso .

Se *l’integrale* di f su ogni *curva semplice e chiusa* in A è *nullo*,

allora f è *analitica* in A.

**Dim.**

Sappiamo che se l’integrale di f su ogni curva semplice e chiusa in A è nullo, allora f ammette una primitiva.

Quindi f è la derivata di una funzione F olomorfa e dunque analitica.

Ne segue che anche f è analitica (essendo la derivata di una analitica).

**Def. Zeri funzione analitica**

Sia una *funzione continua* nell’aperto connesso .

Un punto si dice uno zero di f se .

Se a è uno zero di f e

È lo sviluppo di Taylor in un intorno di a

Allora

**N.B.**

Diremo che a è uno zero di ordine n se per ogni e

**Es.**

la funzione ha uno zero di ordine 3 in a = 1;

**Th.**

Sia una *funzione analitica* nell’aperto connesso .

Sono equivalenti le seguenti proposizioni

1. esiste a ∈ A tale che per ogni
2. f è nulla in un intorno di a
3. f è nulla in A.

**Corollario 1**

Se due funzioni analitiche coincidono in un intorno di a ∈ A, allora coincidono ovunque.

**Th. Principio degli zeri isolati**

L’insieme degli zeri di una funzione analitica non identicamente nulla deﬁnita in A (se non è vuoto) è costituito da punti isolati ed è privo di punti di accumulazione appartenenti ad A.

**Corollario 2 (Principio di identità)**

Se due funzioni analitiche coincidono su un dominio che sia dotato di un punto di accumulazione appartenente allo stesso dominio, allora le due funzioni coincidono ovunque.

**Corollario 3 (Prolungamento analitico)**

Dato un intervallo ed,

se esiste una *funzione analitica* deﬁnita in un aperto tale che e la cui restrizione ad I coincide con ,

allora tale funzione è univocamente determinata ed è detta *prolungamento analitico*.

**Es.**

Le funzioni , e , con , sono i prolungamenti analitici di , e , con .

**N.B.**

Inoltre il prolungamento analitico esiste sempre per le funzioni sviluppabili in serie di Taylor

**Def. Diseguaglianza di Cauchy**

Sia una circonferenza di centro a e raggio r,

allora per n = 0 si ha

Ciò signiﬁca che il valore in un punto si ottiene come *media integrale dei valori* che f assume su una qualunque circonferenza di centro a, contenuta in A.

Separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene un risultato analogo per e per v, che dunque godono della stessa proprietà della media

Proprietà caratteristica delle serie armoniche

Dalla formula

Con detto

Per ogni e per ogni r>0 tale che

Quest’ultima è detta *diseguaglianza di Cauchy*

**Th. Liouville**

Se f è *analitica* su C e per ogni , allora f è *costante*.

**Dim.**

Poiché , la formula

Vale con r arbitrario

Facendo tendere si ha

**Def. Punto singolare isolato**

Data una *funzione analitica* in A, un punto si dice un *punto singolare isolato* o una singolarità isolata per f

Se (che equivale a dire che non è un punto di olomorfia di f)

Ma esiste un intorno forato

tutto contenuto in A (che equivale a dire che i punti sono tutti punti di olomorﬁa di f ).

**N.B**

Punto singolare isolato è necessariamente un punto di frontiera per l’Aperto A di definizione di

Se sono funzioni analitiche in A

Allora

È analitica in A privato degli zeri di

**Classificazione singolarità**

Sia *una funzione analitica* e sia una *singolarità isolata*.

1. **Singolarità eliminabili**:
   1. Supponiamo che esista in C il limite

Si ha che la funzione

È analitica in un intorno di (ed è il prolungamento analitico di f)

In tal caso si dice *singolarità eliminabile*

1. **Poli:**
   1. Supponiamo che per un certo la funzione

Ammetta un limite per cioè

In tal caso si dice che è un polo di ordine n per f

1. **Singolarità essenziali:**
   1. Un punto singolare isolato che non sia né una singolarità eliminabile, né un polo,

si dice una *singolarità essenziale.*

In tal caso non esiste il limite di f per anzi questa è una *condizione necessaria e suﬃciente* perché sia una singolarità essenziale.

**Def. Residuo**

Sia una *funzione analitica* e sia una *singolarità isolata*.

Si deﬁnisce residuo di f in il numero

dove è un circuito contenuto in A e contenente e nessuna altra singolarità di f.

**N.B**

se è una singolarità eliminabile,

allora per il teorema integrale di Cauchy si ha che

**Prop.**

Sia una *funzione analitica* e sia un *polo di ordine n*. Allora

**Dim.**  
Sia un polo di ordine n, allora la funzione

è analitica in un intorno

Dove è una circonferenza di centro e di raggio r contenuta in A

**N.B.**

**Def. Serie bilatera**

Per convergenza della serie precedente si intende che convergono le due seguenti serie

La prima serie si dice *parte singolare* (o parte caratteristica) della serie. La seconda, che è una usuale serie di potenze, si dice *parte regolare* ed ha un suo raggio di convergenza, che chiamiamo R2.

**N.B.**

Facendo il cambiamento di variabili, la prima serie diventa di potenze

che ammette un suo raggio di convergenza, che chiamiamo

Se

converge se

Ponendo

Dunque la serie *converge* all’esterno del cerchio di raggio R1 e la somma della serie è analitica su tale insieme.

**Th.**

La somma di una serie bilatera è una *funzione analitica* in una corona circolare (se R1 < R2).

**Th. Di Laurent**

Sia f una *funzione analitica* su una corona circolare di centro .

Allora f è la somma di una serie bilatera,

cioè vale il seguente sviluppo di Laurent

è una circonferenza di centro e raggio r con

**N.B**

se f è analitica in tutta la palla oppure ha una singolarità eliminabile in

Allora lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor, cioè i coefficienti della parte singolare sono tutti nulli

poiché

è analitica per n ≤−1. Inoltre i coeﬃcienti della parte regolare , n ≥ 0, coincidono con quelli di Taylor poiché si ha

Se

**Prop.**

Sia una *funzione analitica*, sia una *singolarità isolata* e sia

lo sviluppo di Laurent di f in un intorno forato di

Allora

1. è eliminabile se e solo se la parte singolare è nulla

Cioè per ogni n>0

che è lo sviluppo di Taylor di f

1. è un polo di ordine  se e solo se e per ogni
2. è una singolarità essenziale se e solo se per infiniti indici n>0

**Th. Residui**

Sia una *funzione analitica* nell’aperto connesso e sia un circuito in A. Siano dei punti singolari isolati di f appartenenti all’aperto D interno a .

Allora

**Dim.**

Siano delle circonferenze di centro e raggi opportunamente piccoli in modo che ognuna sia interna a D, non si intersechino fra di loro e ognuna non contenga altre singolarità tranne il suo centro. Consideriamo la curva

che è l’unione di curve non connesse tra di loro.

Dal teorema integrale di Cauchy (che vale anche per l’unione di curve) si ha

Per ogni

**Lemma del grande cerchio**

Sia f una funzione *deﬁnita e continua* in un settore angolare (per abbastanza grande) e se , allora

Dove è l’intersezione della circonferenza di raggio R e centro l’origine con settore considerato

**Lemma di Jordan**

Sia g una *funzione deﬁnita e continua in un settore angolare* S contenuto nel semipiano

Supponiamo che

Allora

Dove è l’intersezione della circonferenza di raggio R e centro l’origine con settore considerato

**Lemma del polo semplice**

Sia f una *funzione analitica in un intorno forato* dell’origine ed abbia in tale intorno un *polo semplice*

Allora

dove è la semicirconferenza di equazione

**Def. Funzione L-trasformabile (o trasformabile secondo Laplace)**

Sia I un intervallo contenente il semiasse reale positivo: una *funzione a valori reali o complessi*.

La funzione f è L-trasformabile (o trasformabile secondo Laplace) se tale che la funzione è *sommabile* su , cioè tale che

In tal caso chiameremo integrale di Laplace l’integrale

**N.B**

Se l’integrale converge per un assegnato

Cioè è sommabile su

Allora converge tale che

Infatti

e dunque ) è maggiorata in modulo da una funzione sommabile ed è perciò sommabile a sua volta.

Se l’insieme degli per cui

Converge non è vuoto

allora è costituito da un semipiano (destro), quello dei numeri complessi s per i quali si ha

dove è *l’estremo inferiore delle parti reali dei numeri* per cui

converge

**Def. Trasformata di Laplace**

Sia (dove una *funzione L-trasformabile*

posto è *sommabile*

per ogni s tale che chiameremo trasformata di Laplace di f la funzione

(unilatera essendo ).

Diremo inoltre che è *l’ascissa di convergenza della funzione f*.

La trasformata è un operatore funzionale lineare che associa ad una funzione di variabile reale una funzione di variabile complessa. La trasformata di Laplace rientra nella categoria delle trasformate integrali.

**Funzione Heaveside**

**Funzione delta di Dirac**

**Proprietà Trasformata di Laplace**

1. Linearità
2. Limitatezza
3. Derivata della trasformata di Laplace

**Prop. (Limitatezza)**

Sia f una funzione *L-trasformabile* con ascissa di convergenza

allora per ogni la funzione è *limitata* nel semipiano chiuso

e inoltre

L’ultima aﬀermazione signiﬁca che se è una successione di punti per cui , allora

**Prop. (derivata della trasformata di Laplace)**

Sia f una funzione *L-trasformabile* con ascissa di convergenza

Allora la funzione è *olomorfa* nel semipiano

La funzione è *L-trasformabile* con ascissa di convergenza e abbiamo

dove con si intende la derivata in campo complesso.

In generale si ha . Moltiplicazione per t alla n-esima potenza

**Def. Segnali**

La deﬁnizione di trasformata coinvolge solo i valori di per .

Se è deﬁnita su R denotiamo

Cioè

Una funzione nulla per e *L-trasformabile* viene chiamata *segnale*

**Proprietà segnale:**

1. Traslazione nel tempo
2. Traslazione complessa

**Prop.**

Sia f un segnale periodico per di periodo T, cioè .

Se f è sommabile in .

Allora

**Th.**

Sia f un *segnale continuo* per , *derivabile con derivata prima continua a tratti e Laplace-trasformabile.*

Allora si ha che

**Th.**

Se f e g sono *due segnali L-trasformabili* con ascisse di convergenza e rispettivamente,

allora *è L-trasformabile* nel semipiano e si ha

**Th. (Inversione della trasformata di Laplace)**

Sia f un *segnale regolare a tratti* e

sia la sua trasformata con ascissa di convergenza Per ogni si ha

Dove ed sono i limiti sinistro e destro in t

Qui l’integrale a valor principale v.p. è deﬁnito come

**Corollario**

In particolare,

nei punti t in cui è continua. Quindi

**Th.**

Sia una funzione analitica nel semipiano e tale che si abbia

con

cioè

Allora per ogni la formula

deﬁnisce un segnale continuo su R, indipendente da α, avente la F come trasformata.

**N.B**

dove gli sono i punti singolari della funzione